1. Tutorium - Theoretische Mechanik

23.10.19

Einführung Indexkalkül:

Kronecker Delta: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i=j \\ 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$

Levi-Civita-Symbol: $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{wenn } ijk \text{ gerade Permutation von } (1,2,3) \\ -1, & \text{wenn } ijk \text{ ungerade Permutation von } (1,2,3) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Einsteinsche Summenkonvention:

- über doppelt auftretende Indizes wird summiert

Beispiel: $\sum_i a_i b_i = a_i b_i \qquad (\hat{A} \cdot \hat{B})_{ij} = A_{ik} B_{kj}$

- dreifache Indizes dürfen nicht auftauchen

Kreuzprodukt: $\boxed{(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \, a_j \, b_k}$ (I)

$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} \, a_j \, b_k \, \hat{e}_i$

Skalarprodukt: $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \, b_j \, \delta_{ij}}$ (II)

Das Kronecker-Delta „wandelt" Indizes um: $a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$

Eigenschaften des Epsilon-Tensors: ε_{ijk}

- lässt sich als Spatprodukt orthogonaler Einheitsvektoren auffassen

$$\varepsilon_{ijk} = \hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)$$

→ zyklische Vertauschbarkeit: $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki}$

- Produktregel: $\varepsilon_{ijk} \, \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$ (1)

$\Rightarrow \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijn} = 2 \delta_{kn}$

$\Rightarrow \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$

Anwendungen: BAC-CAP Regel

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \varepsilon_{ijk} \, a_j \, [\vec{b} \times \vec{c}]_k \, \hat{e}_i$$

$$\overset{(I)}{=} \varepsilon_{ijk} \, \varepsilon_{klm} \, a_j \, b_l \, c_m \, \hat{e}_i$$

$$\overset{(1)}{=} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \, a_j \, b_l \, c_m \, \hat{e}_i$$

$$= a_j \, b_i \, c_j \, \hat{e}_i - a_j \, b_j \, c_i \, \hat{e}_i$$

$$\overset{(II)}{=} \underline{\underline{(\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}}}$$

Serie 1 : Aufgabe 3a)

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{d}{dt}(\delta_{ij}\, a_i\, b_j)$$
$$= \delta_{ij}\,\frac{d}{dt}(a_i\, b_j)$$
$$= \delta_{ij}\,\frac{da_i}{dt}\, b_j + \delta_{ij}\,\frac{db_j}{dt}\, a_i$$
$$= \frac{d\vec{a}}{dt}\,\vec{b} + \frac{d\vec{b}}{dt}\,\vec{a}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{d}{dt}(\varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k\, \hat{e}_i)$$
$$= \varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_i\,\frac{d}{dt}(a_j\, b_k)$$
$$= \varepsilon_{ijk}\,\frac{da_j}{dt}\, b_k\,\hat{e}_i + \varepsilon_{ijk}\,\frac{db_k}{dt}\, a_j\,\hat{e}_i$$
$$= \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$$

weitere Übungen:

Jacobi-Identität: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = 0$

Lagrange-Identität: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) \overset{(\mathrm{II})}{=} (\vec{a}\times\vec{b})_i\,(\vec{c}\times\vec{d})_i$$
$$\overset{(\mathrm{I})}{=} \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k\, \varepsilon_{ilm}\, c_l\, d_m$$
$$= \varepsilon_{jki}\,\varepsilon_{lmi}\, a_j\, b_k\, c_l\, d_m$$
$$\overset{(1)}{=} (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\, a_j\, b_k\, c_l\, d_m$$
$$= \delta_{jl}\delta_{km}\, a_j b_k c_l d_m - \delta_{jm}\delta_{kl}\, a_j b_k c_l d_m$$
$$= (a_j\, c_j)(b_k\, d_k) - (a_j\, d_j)(b_k\, c_k)$$
$$\overset{(\mathrm{II})}{=} (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

Umgang mit Differentialoperatoren: $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial x_i$

$\vec{\nabla} = \partial_i\,\hat{e}_i$ $\quad$ $\mathrm{div}\,\vec{A} = \partial_i A_i$

$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j A_k\,\hat{e}_i$

$\mathrm{grad}\,\phi = (\partial_i\phi)\,\hat{e}_i$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = 0$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi) = \mathrm{rot}(\partial_i\,\phi\,\hat{e}_i)$$
$$= \varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,\partial_k\,\phi\,\hat{e}_i$$
$$= \varepsilon_{ijk}\,\partial_k\,\partial_j\,\phi\,\hat{e}_i = -\varepsilon_{ikj}\cdot\partial_k\,\partial_j\,\phi\,\hat{e}_i$$
$$= -\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi) \Rightarrow \underline{\underline{\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi) = 0}}$$